PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TRANSPORTES E GESTÃO TERRITORIAL – PPGTG
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL – ECV

DISCIPLINA: TGT410026 – FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

4ª AULA: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PROBABILIDADE

ESTATÍSTICA NA PRÁTICA:

"A Morton International é uma empresa que comercializa sal, produtos domésticos, motores de foguetes e química fina. A Carstab Corporation, uma subsidiária da Morton Int. produz química fina e disponibiliza uma série de produtos químicos concebidos para cumprir as especificações exclusivas de seus clientes".

"Para um cliente em particular a Carstab produziu um custoso catalisador que é usado no processamento de produtos químicos. Alguns lotes, mas não todos, produzidos pela Cartstab satisfazem as especificações do cliente para o produto".

"O cliente da Carstab concordou em testar cada lote depois de recebê-lo e determinar se o catalisador desempenharia a função desejada. Os lotes que não fossem aprovados no teste realizado pelo cliente seriam devolvidos à Carstab. No decorrer do tempo, a Carstab descobriu que o cliente aceitava 60% dos lotes e devolvia 40%. Em termos de probabilidade, cada remessa da Carstab ao cliente tinha uma probabilidade de 0,60 de ser aceita e 0,40 de ser devolvida".

"Nem a Carstab nem o cliente estavam satisfeitos com esse resultado. Em um esforço para melhorar o serviço, a Carstab explorou a possibilidade de reproduzir o teste do cliente antes do embarque. Entretanto, o alto custo dos equipamentos especiais de teste tornou essa alternativa inviável. Os químicos da Carstab propuseram então um novo teste de custo relativamente baixo para indicar se um lote seria aprovado no teste do cliente. A QUESTÃO DE PROBABILIDADE ENVOLVIDA ERA: QUAL A PROBABILIDADE DE UM LOTE SER APROVADO NO TESTE DO CLIENTE SE TIVESSE SIDO APROVADO NO NOVO TESTE DA CARSTAB.?"

"Uma amostra de lotes foi produzida e submetida ao novo teste da Carstab. Somente os lotes aprovados no novo teste da Carstab seriam enviados ao cliente. A análise probabilística dos dados indicou que, se um lote fosse aprovado no teste da Carstab, teria uma

probabilidade de 0,909 de ser aprovado no teste do cliente e ser aceito. Alternativamente, se um lote fosse aprovado no teste da Carstab, teria somente uma probabilidade de 0,091 de ser devolvido. A análise probabilística forneceu uma comprovação fundamental para a adoção e implementação dos novos procedimentos de teste na Carstab. O novo teste resultou em uma melhoria imediata do atendimento ao cliente e em uma redução substancial dos custos de embarque e manuseio dos lotes devolvidos".
"A probabilidade de um lote SER ACEITO pelo cliente depois de SER APROVADO no teste da Carstab denomina-se PROBABILIDADE CONDICIONAL".
Neste capítulo, você aprenderá a calcular esta e outras probabilidades úteis no processo de tomada de decisões.

1. EXPERIMENTOS, REGRAS DE CONTAGEM E ATRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES.

Experimento: qualquer processo que gera resultados bem definidos. Ao especificar todos os resultados possíveis, identificamos o **espaço amostral** (**S**) de um experimento.

Experimento	**Resultados experimentais**
Jogar uma moeda	S = {Cara, coroa}
Selecionar uma peça para inspeção	S = {Defeituosa, não defeituosa}
Fazer um contato de venda	S = {Comprar, não comprar}
Lançar um dado	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Jogar uma partida de futebol	S = {Ganhar, perder, empatar}

Regras de contagem: combinações e permutações

Ser capaz de identificar e contar os resultados amostrais são etapas necessárias na atribuição de probabilidades.

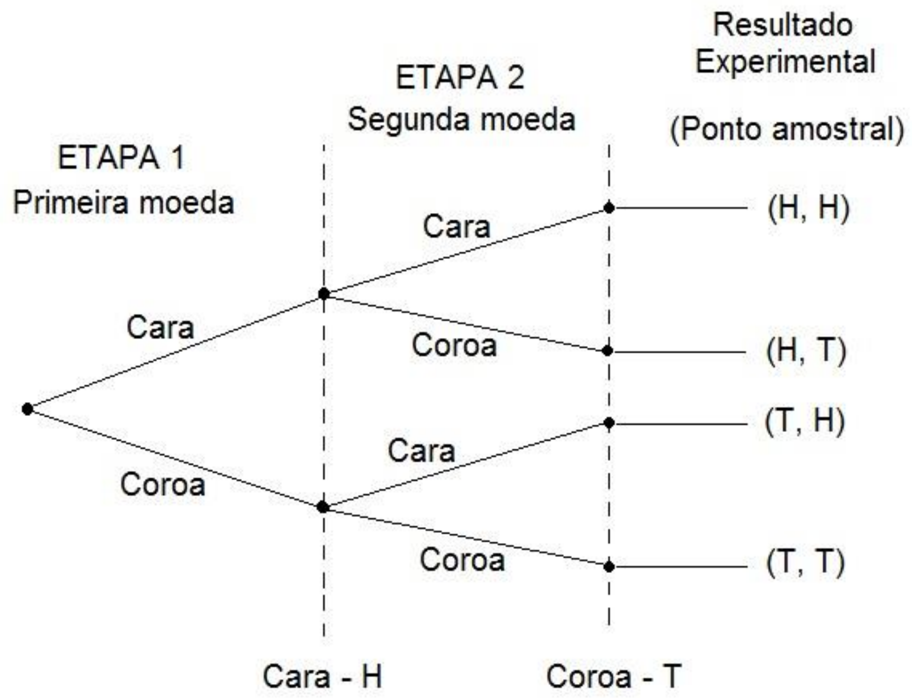
Experimentos em múltiplas etapas – considere o experimento de jogar duas moedas. Quantos resultados experimentais são possíveis? Posso imaginar o experimento em duas etapas no qual a etapa 1 consiste em lançar a primeira moeda, e na etapa 2, em lançar a segunda moeda. Usando H para denotar cara e T para denotar coroa podemos enumerar os resultados e escrever o espaço amostral:

$$S = \{(HH), (HT), (TH), (TT)\}$$

Regra de contagem: se um experimento pode ser descrito como uma sequência de k etapas com n_1 resultados possíveis na primeira etapa, n_2 resultados possíveis na segunda etapa e assim por diante, o número total de resultados experimentais será dado por (n_1), (n_2), …, (n_k).

E se lançarmos 6 moedas? 100 moedas?

Diagrama em árvore: é uma representação gráfica que ajuda a visualizar um experimento em múltiplas etapas.



Combinações – 2ª regra útil de contagem de resultados experimentais quando o número envolve escolher n objetos de um conjunto de N objetos, com $(N > n)$.

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$N! = N(N-1)(N-2)...(2)(1)$$

$$n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1)$$

$$0! = 1$$

Aplicação: ... controle de qualidade em que o inspetor seleciona aleatoriamente duas de cinco peças para testar se há defeitos. Em um grupo de cinco peças, quantas combinações de duas peças podem ser selecionadas? Com N = 5 e n = 2 temos:

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{(2.1).(3.2.1)} = \frac{120}{12} = 10$$

Rotulando as cinco peças por A, B, C, D, E, os dez resultados experimentais são: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE. Assim, o espaço amostral é:

S = {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}.

Permutações – 3ª regra útil de contagem de resultados experimentais; aplica-se esta regra quando no processo de escolha dos *n* objetos de um conjunto de *N* objetos, a ordem de escolha é importante. O número de permutações de N objetos tomados n a cada vez é dado por:

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

O mesmo exemplo anterior, da inspeção das cinco peças, a escolha de duas em busca de defeitos resulta em 20 casos possíveis:

$$P_2^5 = 2!\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} = \frac{120}{6} = 20$$

Utilizando os mesmos rótulos do exemplo anterior, as 20 permutações serão: AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB,BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE, ED.

Atribuição de probabilidades

Independentemente do método utilizado para atribuir probabilidades, ***dois requisitos básicos para atribuir probabilidades*** devem ser satisfeitos:

$$0 \le P(E_i) \le 1$$
$$P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) = 1$$

Em geral, três abordagens são usadas com frequência para a atribuição de probabilidades:

- O método clássico
- O método da frequência relativa
- O método subjetivo

Método clássico – é apropriado quando todos os resultados experimentais são igualmente prováveis. Se *n* resultados experimentais são possíveis, a probabilidade *1/n* é atribuída a cada resultado experimental.

Exemplos:
a) Experimento de lançar uma moeda: P(H)=1/2   P(T)=1/2
Tanto P(H) como P(T) cumprem a regra 1: $0 \leq P(n) \leq 1$; e também a regra 2: P(H)+P(T)=1.

b) Experimento de lançar o dado e verificar o número: P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6. Também aqui as duas regras são cumpridas!

Método da frequência relativa – método apropriado quando se tem dados disponíveis para estimar a proporção em que o resultado experimental ocorrerá se o experimento for repetido inúmeras vezes.

Exemplo:
Considere o estudo sobre o tempo de espera no setor de raios-X de um hospital municipal. Um atendente registrou o número de pacientes à espera de atendimento às 9:00h em 20 dias consecutivos e obteve a seguinte tabela de frequências:

Número de pessoas á espera de atendimento	Número de dias em que o resultado ocorreu
0	2 → P(0) = 0,10
1	5 → P(1) = 0,25
2	6 → P(2) = 0,30
3	4 → P(3) = 0,20
4	3 → P(4) = 0,15
Total:	20 dias $\sum P(n) = 1,00$

Esses resultados mostram que em dois dos 20 dias, nenhum (0) paciente estava à espera de atendimento; em cinco desses dias, um paciente estava à espera de atendimento e assim por diante. Usando a frequência relativa atribuímos uma probabilidade de 2/20 = 0,10 ao resultado experimental de nenhum paciente estar à espera de atendimento; assim, teríamos para os demais dados: P(1) = 5/20 = 0,25; P(2) = 6/20 = 0,30; P(3) = 4/20 = 0,20 e P(4) = 3/20 = 0,15.

Método subjetivo – utilizado quando poucos dados relevantes estão disponíveis ou quando não se pode presumir realisticamente que os resultados experimentais são igualmente prováveis. A atribuição de probabilidade, neste caso, é baseada na nossa intuição ou grau de confiança (escala de 0 a 1) de que o resultado experimental ocorrerá.

OBSERVAÇÃO ÚTIL: toda vez que extraímos uma amostra aleatória, SEM SUBSTITUIÇÃO, de uma população de tamanho *N*, usamos a regra de contagem de combinações para encontrar o número de diferentes amostras de tamanho *n* que podem ser selecionadas.

APLICAÇÕES:

1. Tom e Judy fizeram uma oferta para comprar uma casa. Judy, mais otimista, acredita que a probabilidade de sua oferta ser aceita é de 0,80; Tom, entretanto, acredita que sua oferta possui 0,60 de chance de ser aceita. Estabeleça os experimentos possíveis e atribua as probabilidades. Comente com relação ao atendimento das regras básicas.

2. De quantas maneiras três itens podem ser selecionados de um grupo de seis itens? Use as letras A, B, C, D, E, F para identificar os itens e relacione cada uma das diferentes combinações dos três itens.

3. Considere o experimento de lançar uma moeda três vezes.
a) desenvolva um diagrama em árvore para o experimento;
b) relacione os resultados experimentais;
c) qual é a probabilidade relativa a cada resultado experimental?

4. Um experimento com três resultados foi repetido 50 vezes e soube-se que E1 ocorria 20 vezes; E2, 13 vezes; E3, 17 vezes. Atribua probabilidades aos resultados. Qual método você usou?

5. Suponha que um experimento tenha cinco resultados igualmente prováveis: E1, E2, E3, E4, E5; Atribua probabilidades a cada resultado e mostre que os requisitos básicos são satisfeitos.

6. Na cidade de Milford/EUA, os requerimentos para alteração do zoneamento passam por duas etapas: uma revisão pela comissão de planejamento e uma decisão pela Câmara Municipal. Na etapa 1, a comissão de planejamento revisa o requerimento de alteração do zoneamento e apresenta uma recomendação positiva ou negativa correspondente. Na etapa 2, a Câmara Municipal revisa a recomendação da comissão de planejamento e então realiza uma votação para aprovar ou desaprovar a alteração do zoneamento. Considere o processo de

requerimento um experimento.
a) quantos pontos amostrais há para esse experimento? Relacione-os.
b) Construa um diagrama em árvore para o experimento.

9. A amostragem aleatória simples usa uma amostra de tamanho n de uma população de tamanho N para obter dados que podem ser usados para se fazer inferências a respeito das características de uma população. Suponha que de uma população de 50 contas bancárias queiramos extrair uma amostra aleatória de quatro contas a fim de conhecermos a população. Quantas amostras aleatórias diferentes de quatro contas são possíveis?

10. A loteria Powerball é jogada duas vezes por semana em 23 estados, nas Ilhas Virgens e no Distrito de Columbia. Para jogar na Powerball o participante deve comprar um bilhete que custa US$ 1 e então escolher cinco números dos dígitos 1 a 53 e um número Powerball dos dígitos 1 a 42. Para determinar os números sorteados em cada jogo, os diretores da loteria extraem 5 bolas brancas de um globo com 53 bolas brancas, e uma bola vermelha de um globo contendo 42 bolas vermelhas. Para ganhar o prêmio, os números do bilhete dos participantes devem coincidir com os números contidos nas cinco bolas brancas, em qualquer ordem, bem como o número Powerball. Em agosto de 2001, quatro ganhadores repartiram o prêmio de US$ 295 milhões ao acertarem os números 8, 17, 22, 42 e 47, mais o número Powerball, 21. Além do prêmio principal, há uma série de outros prêmios que são concedidos a cada vez que há sorteios. Por exemplo, um prêmio de US$ 100 mil é pago se os números do participante coincidirem com os cinco números contidos nas cinco bolas brancas.
a) calcule o número de maneiras pelas quais os cinco números podem ser selecionados.
b) qual é a probabilidade de se ganhar um prêmio de US$ 100 mil ao coincidir os números contidos nas cinco bolas brancas?
c) qual é a probabilidade de se ganhar o prêmio Powerball?

11) Idem ao caso da Megasena.
a) calcule o número de maneiras pelas quais os cinco números podem ser selecionados.
c) qual é a probabilidade de se ganhar o prêmio da Megasena?

2. EVENTOS E SUAS PROBABILIDADES

Vimos os conceitos de experimento, pontos amostrais e aprendemos como atribuir probabilidades a resultados experimentais.
Agora vamos introduzir o conceito de **evento**, uma vez que ele se relaciona com os pontos amostrais.
EVENTO é um conjunto de pontos amostrais ou um conjunto de resultados experimentais de interesse. Para atribuir probabilidades a um evento basta somar as probabilidades dos pontos amostrais que constituem um evento.

Exemplo 1 – considere o experimento de lançar um par de dados; suponha que estejamos interessados no evento: soma dos valores de face mostrados nos dados.
a) Quantos pontos amostrais são possíveis? (Dica: use a regra de contagem de experimento em múltiplas etapas).

D1/D2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Portanto, são 36 os pontos amostrais.
b) Relacione os pontos amostrais. Ver quadro.
c) qual é a probabilidade de se obter o valor 7? O evento soma sete aparece em seis oportunidades: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) e (6,1). Portanto a P(Soma=7)=6/36=1/6.
d) Qual é a probabilidade de se obter um valor nove ou um valor maior? Vemos que são dez possibilidades: (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). Portanto a P(Valor≥9)=10/36=5/18.
e) Uma vez que cada lançamento tem seis valores pares possíveis (2, 4, 6, 8, 10, 12) e somente cinco valores ímpares possíveis (3, 5, 7, 9, 11) os dados exibirão valores pares com mais frequência do que valores ímpares? Explique.
Observando o quadro vemos que temos dezoito resultados possíveis para soma par e outros dezoito resultados possíveis para soma ímpar; logo a P(Impar) = P(Par) = 18/36 = 1/2.
F) qual método você usou para atribuir as probabilidades solicitadas? Método clássico.

EXEMPLO 2 – O gerente de um grande complexo de apartamentos forneceu as seguintes estimativas subjetivas acerca do número de apartamentos vagos no próximo mês:

Apartamentos vazios	**Probabilidades**
0	0,05
1	0,15
2	0,35
3	0,25
4	0,10
5	0,10
Soma:	1,00

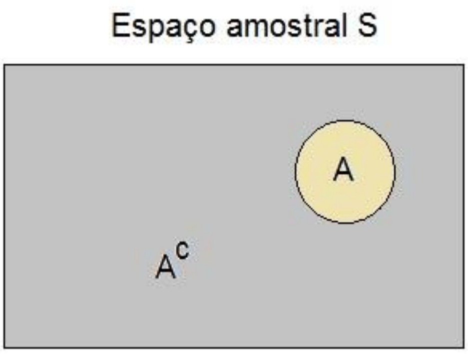
Forneça a probabilidade de cada um dos seguintes eventos:
a) não haverá apartamentos vazios; → P(0) = 0,05 = 5%
b) haverá pelo menos quatro apartamentos vazios; → P(4 ou 5) = 0,10 + 0,10 = 0,20 = 20%
c) haverá dois ou menos apartamentos vazios; → P(0 ou 1 ou 2) = 0,05 + 0,15 + 0,35 = 0,55 = 55%

3. ALGUMAS RELAÇÕES BÁSICAS DE PROBABILIDADE

Vamos relembrar agora algumas regras da teoria dos conjuntos e aplica-las ao conceito de evento. São eles: complemento, adição e intersecção.

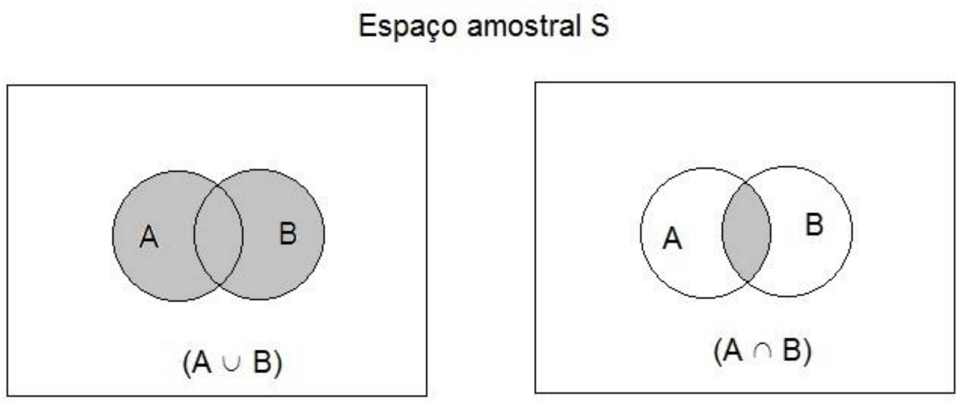
Complemento – dado um evento **A**, o complemento denotado por $\mathbf{A^c}$ consiste em todos os pontos amostrais que não estão contidos em **A**. No diagrama abaixo, a área retangular representa o espaço amostral do experimento e, como tal, contém todos os pontos amostrais possíveis. O círculo representa o evento A e contém apenas os pontos amostrais que pertencem a A. A região sombreada do retângulo contém todos os pontos amostrais que não estão contidos em A e, por definição, é o complemento de A. Em qualquer aplicação de probabilidade, ou o evento A ou o seu complemento Ac devem ocorrer. Portanto, temos:

$$P(A) + P(A^c) = 1 \qquad\qquad P(A) = 1 - P(A^c)$$



Como exemplo, considere o caso de um agente de compras que afirmou que a probabilidade de o fornecedor enviar uma remessa isenta de peças defeituosas é 0,90. Usando o complemento, podemos concluir que a probabilidade de a remessa não conter peças defeituosas é: 1 – 0,90 = 0,10.

Lei da Adição – é uma lei muito útil quando estamos interessados em saber qual é a probabilidade de ocorrer pelo menos um de dois eventos, ou seja, com os eventos A e B estamos interessados em saber qual é a probabilidade de ocorrência do evento A ou do evento B, ou de ambos.



União de dois eventos: é o evento que contém todos os pontos amostrais que pertencem a A ou B, ou a ambos. A união é denotada por $A \cup B$.

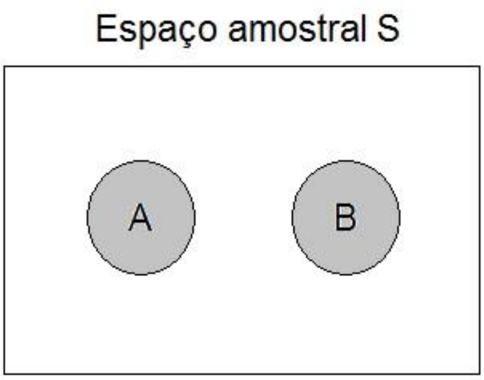
Intersecção de dois eventos – dados dois eventos A e B, a intersecção de A e B é o evento que contém os pontos amostrais que pertencem tanto a A como a B. A intersecção é denotada por $A \cap B$. A área em que os dois círculos se sobrepõem é a intersecção; ela contém os pontos amostrais que estão tanto em A como em B.

Estamos prontos para discutir a Lei da Adição de eventos. Esta lei constitui uma maneira de calcular a probabilidade de o evento A ou evento B, ou ambos, ocorrerem. É escrita da seguinte forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A presença do termo $P(A \cap B)$ na expressão é necessária uma vez que os dois primeiros termos já contabilizam todos os pontos amostrais de $A \cup B$. Entretanto, desde que os pontos amostrais na intersecção $A \cap B$ estão tanto em A como em B, quando calculamos $P(A) + P(B)$ estamos contando cada um dos pontos amostrais em A ∩ B duas vezes. A correção é subtrair o termo P(A ∩ B).

Concluindo a discussão da Lei da Adição de eventos resta considerar um caso especial que se apresenta para ***eventos mutuamente exclusivos***. Dois eventos são considerados mutuamente exclusivos se eles não tiverem nenhum ponto amostral em comum. Isto é, se um evento ocorre o outro não pode ocorrer.



Assim reescreve-se a Lei da Adição para eventos mutuamente exclusivos como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

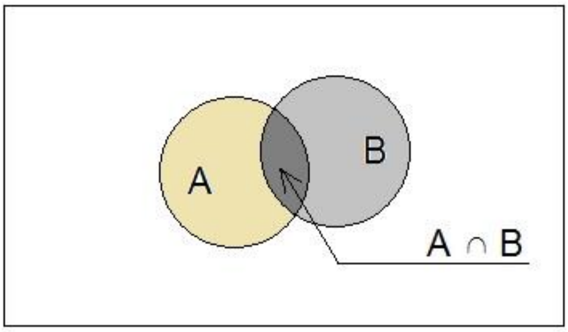
4. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Com frequência, a probabilidade de um evento é influenciada pelo fato de um evento relacionado já ter ocorrido ou não. Suponha que temos um evento A com a probabilidade P(A). Se obtivermos uma nova informação e soubermos que um evento relacionado, denotado por B, já ocorreu, gostaríamos de tirar proveito dessa informação calculando uma nova probabilidade para o evento A.
Essa nova probabilidade do evento A denomina-se ***probabilidade condicional*** e é escrita como P(A|B). Esta notação nos diz que estamos considerando a probabilidade do evento A ***dada*** a condição de o evento B ter ocorrido.
Pode-se exprimir a probabilidade condicional entre dois eventos A e B como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ou

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



O diagrama é útil para entendermos intuitivamente a probabilidade condicional. O círculo à direita mostra que ocorreu o evento B; a parte do círculo que se sobrepõe ao evento A denota o evento (A ∩ B). Sabemos que, desde que o evento B ocorreu, a única maneira pela qual podemos também observar o evento A é pela intersecção. Assim, a razão P(A ∩ B)/P(B) nos fornece a probabilidade condicional de que observaremos o evento A dado que o evento B já ocorreu.

Lei da multiplicação – é utilizada para calcular a probabilidade de uma intersecção de dois eventos. Escreve-se assim:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

Um caso especial no cálculo de probabilidade condicional diz respeito à ocorrência de ***eventos independentes***. Se há a possibilidade de o evento A não se alterar em função da existência do evento B, diz-se, nesse caso, que os eventos A e B são independentes e a expressão pode ser reescrita como:

$$P(A|B) = P(A)$$

ou

$$P(B|A) = P(B)$$

Assim, a Lei da multiplicação para eventos independentes pode ser resumida como:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

APLICAÇÕES

1. Um experimento tem quatro resultados igualmente prováveis: *E1, E2, E3, E4*.
a) qual é a probabilidade de ocorrer o evento E2? (1/4)
b) qual é a probabilidade de dois eventos quaisquer ocorrerem? (1/2)
c) qual é a probabilidade de três eventos quaisquer ocorrerem? (3/4).

2. Suponha que temos um espaço amostral com cinco resultados experimentais igualmente prováveis: *E1, E2, E3, E4, E5*. Vamos admitir que:
A = {*E1, E2*} B = {*E3, E4*} C = {*E2, E3, E5*}
a) Encontre P(A), P(B) e P(C). Resp.: (0,4); (0,4); (0,6)
b) encontre $P(A \cup B)$. A e B são mutuamente exclusivos? Sim; (0,8).
c) Encontre A^c, C^c, $P(A^c)$ e $P(C^c)$. Resp.: {E3,E4,E5); {E1,E4}; (0,6); (0,4).
d) encontre $A \cup B^c$ e $P(A \cup B^c)$. Resp.: {E1,E2,E5}; (0,6).
e) encontre $P(B \cup C)$. Resp.: P(E2,E3,E4,E5).

3. Uma Universidade fez uma pesquisa com seus ex-formandos para conhecer melhor o que eles pensam a respeito da universidade. Uma parte da pesquisa pedia que os consultados indicassem se a experiência que haviam tido na Universidade ficara aquém das expectativas, se atingira as expectativas ou se superara as expectativas. O resultado mostrou que 4% dos consultados nada responderam; 26% disseram que suas experiências ficaram aquém das expectativas e 65% dos consultados disseram que suas experiências atingiram as expectativas.
a) se escolhermos aleatoriamente um ex-aluno, qual é a probabilidade de ele afirmar que sua experiência superou as expectativas? Resp.: (0,05).
b) se escolhermos aleatoriamente um ex-aluno, qual é a probabilidade de ele afirmar que suas expectativas foram atingidas ou superadas? Resp.: (0,70).

4. Suponha que temos dois eventos A e B, sendo P(A) = 0,50; P(B) = 0,60 e $P(A \cap B) = 0{,}40$.
a) determine P(A | B)? Resp.: P(A|B) = 0,667
b) determine P(B | A)? Resp.: P(B|A) = 0,80
c) A e B são eventos independentes? Por quê? Resp.: Não; a P(A) é diferente de P(A|B) e $P(B) \neq P(B|A)$.

5. A tabela a seguir apresenta a distribuição dos tipos de sangue da população em geral.

	A	B	AB	O
Rh+	0,34	0,09	0,04	0,38
Rh-	0,06	0,02	0,01	0,06

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa ter sangue do tipo O? (0,44).

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa ser Rh-? (0,15).

c) Qual é a probabilidade de uma pessoa ser Rh- sendo do grupo sanguíneo do tipo O? (0,136).

d) Qual a probabilidade de uma pessoa ter o tipo sanguíneo B sendo Rh+? (0,106)

e) Qual é a probabilidade de, em um casal, ambos os cônjuges serem Rh-? (0,0225)

f) Qual é a probabilidade de, em um casal, ambos os cônjuges terem o tipo sanguíneo AB? (0,0025).