

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
TRANSPORTES E GESTÃO TERRITORIAL – PPGTG
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL – ECV

DISCIPLINA: TGT410026 – FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

10ª AULA: ASSOCIAÇÃO, CORRELAÇÃO E REGRESSÃO

Em Engenharia, costumamos trabalhar com variáveis mensuradas numericamente; são as variáveis quantitativas; em Ciências Sociais, grande parte das variáveis indica certas qualidades ou atributos. Cada uma delas tem um tratamento adequado, quando alocadas adequadamente em categorias, resultando em dados categorizados.

10.1) ASSOCIAÇÃO

Para as variáveis categorizadas, é de interesse saber se duas ou mais variáveis se apresentam *associadas*. E mais, é interesse medir o grau de associação de variáveis qualitativas, descrita pela amostra. Para variáveis quantitativas, a associação entre duas ou mais variáveis é estudada sob a denominação de *correlação*.

1) Teste de associação entre variáveis qualitativas

O teste mais antigo utilizado nas pesquisas sociais é o teste do χ^2 . O método permite testar a significância da associação entre duas variáveis qualitativas.

Torna-se importante, nesse momento, apresentar o significado de variáveis independentes: duas variáveis são independentes quando o conhecimento do resultado de uma não fornece qualquer informação sobre a outra. Basta que o conhecimento de uma delas altere a probabilidade dos resultados da outra, que já caracteriza associação.

O teste pode ser realizado para estudar o relacionamento entre variáveis e também entre amostras; neste caso, basta que os resultados da variável resposta estejam dispostos em categorias.

Exemplo 1:

Quadro 1: tabela de contingência (2x2) – distribuição de 300 pessoas, classificadas segundo o sexo e tabagismo.

	Sexo		
Tabagismo	Masculino	Feminino	Total
Fumante (%)	92 (46)	38 (38)	130 (43,33)
Não-fumante (%)	108 (54)	62 (62)	170 (56,67)
Total	200	100	300

Observação: As percentagens entre parênteses referem-se aos totais da variável sexo (totais das colunas).

Observou-se 300 pessoas de certa população, classificando-se segundo as variáveis: sexo e tabagismo; deseja-se verificar se os dados da amostra mostram evidência suficiente para afirmarmos se, na população em estudo, existe associação entre sexo e tabagismo ou, o que é equivalente, se existe diferença significativa entre a proporção de homens fumantes e a proporção de mulheres fumantes. De maneira geral têm-se as hipóteses do teste:

H_0 : sexo e tabagismo são variáveis independentes na população em estudo

H_1 : existe associação entre as variáveis sexo e tabagismo, na população em estudo.

Exemplo 2:

Quadro 6.2: tabela de contingência (3x3) – distribuição de frequências do grau de instrução do chefe da casa, segundo a localidade da residência. Amostra de 120 famílias do Bairro Saco Grande II, Fpolis/SC, 1988.

	Localidade		
Grau de Instrução	Monte Verde	Parque da Figueira	Encosta do Morro
Nenhum (%)	6 (15)	14 (32,6)	18 (48,7)
Primeiro grau (%)	11 (27,5)	14 (32,6)	13 (35,1)
Segundo grau (%)	23 (57,5)	15 (34,8)	6 (16,2)
Total (%)	40 (100)	43 (100)	37 (100)

Observação: os números entre parênteses correspondem às percentagens em relação ao total de famílias observadas em cada localidade.

O exemplo 2 objetiva verificar se três localidades são diferentes em termos do grau de instrução do chefe da casa. Para tal foram selecionadas amostras aleatórias nas localidades, classificando-as segundo o grau de instrução do chefe da casa.

As hipóteses a serem testadas seriam:

H₀: as distribuições de frequência do grau de instrução do chefe da casa são iguais nas três localidades

H₁: as distribuições de frequência do grau de instrução do chefe da casa não são iguais nas três localidades

No entanto, deseja-se, na verdade, é saber se existe ou não alguma espécie de associação envolvida; para tal, supor que as três localidades formam categorias de uma variável, denominada, por exemplo, *localidade da residência*. Assim, é possível mudar o enfoque e colocar as hipóteses em termos de *independência* (H₀) e *associação* (H₁) entre as variáveis *localidade da residência* e *nível de instrução do chefe da casa*.

H₀: as duas variáveis são independentes

H₁: existe associação entre as duas variáveis

a) Estatística do teste

O teste do χ^2 é uma espécie de indicador que mostra quão significativa é a diferença entre a frequência observada (O) e a frequência teórica (E), aquela que esperaríamos encontrar em cada amostra; tudo isso na suposição das variáveis serem independentes.

A fórmula empregada para o cálculo da estatística χ^2 é:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

Onde o somatório se estende a todas as células da tabela de contingência.

As frequências observadas são oriundas da amostra; as teóricas devem ser calculadas a partir dos dados da amostra, sempre considerando as variáveis envolvidas como independentes (que é a base da H₀). Assim, no caso do exemplo 1, devemos esperar que as percentagens de fumantes e não fumantes (detectadas na amostra) se mantenham, tanto no estrato dos homens, como no estrato das mulheres.

Desse modo, como foram observados 200 homens, deve-se esperar:

43,33% de 200 homens fumantes $\Rightarrow E = (0,433 \times 200) = 86,67$;

56,67% de 200 homens não fumantes $\Rightarrow E = (0,5667 \times 200) = 113,33$.

Para as mulheres, o procedimento é idêntico:

43,33% de 100 mulheres fumantes $\Rightarrow E = (0,433 \times 100) = 43,33$

56,67% de 100 mulheres não fumantes $\Rightarrow E = (0,5667 \times 100) = 56,67$

Organizando os resultados encontrados num quadro:

Tabagismo	Sexo		Total
	Masculino	Feminino	
Fumante	86,67 [0,328]	43,33 [0,656]	130 (43,33)
Não fumante	113,33 [0,251]	56,67 [0,501]	170 (56,67)
Total	200	100	300 (100,00)

Calculando agora a estatística χ^2 para cada célula, vem:

$(O - E)^2 / E = (92 - 86,67)^2 / 86,67 = 0,328$; e assim por diante. Os resultados encontrados estão na Tabela, entre colchetes. Somando todas as parcelas, tem-se, portanto, $\chi^2 = 1,74$.

Algumas considerações:

- i) quando as variáveis são independentes (H_0), as frequências observadas (O) tendem a ficar próximas das esperadas (E) – as diferenças são apenas devidas as variações casuais!!;
- ii) valendo a afirmativa anterior (i), então o valor do χ^2 deve ser pequeno;
- iii) um valor pequeno para o χ^2 indica que as variáveis podem ser independentes;
- iv) um valor grande para o χ^2 , sinaliza que as diferenças entre as frequências observadas e esperadas não devem ser meramente casuais, ou seja, há indícios de associação entre as duas variáveis.

b) A distribuição de referência e a probabilidade de significância P

Com base nas considerações anteriores, o objetivo agora, é descobrir uma distribuição de referência que nos permita inferir se um determinado valor da estatística χ^2 pode ser considerado grande o suficiente para rejeitar H_0 em favor de H_1 .

Esta distribuição existe nas seguintes condições:

- (a) os dados devem estar dispostos numa tabela de contingência;
- (b) as amostras sejam grandes.

A maioria dos autores considera adequada a aplicação do teste qui-quadrado quando todas as **frequências esperadas sejam maiores ou iguais a cinco**. Atendidas as duas condições acima e, considerando que as duas variáveis sejam realmente independentes (H_0), então os possíveis valores da estatística χ^2 seguem a distribuição qui-quadrado com $gl = (\ell - 1) \cdot (c - 1)$ graus de liberdade, onde ℓ é o número de linhas e c o número de colunas.

A Figura 6.1 ilustra uma probabilidade de significância P , como uma área sob a curva de distribuição qui-quadrado. Sendo as duas variáveis realmente independentes, o valor de P representa a probabilidade da estatística χ^2 acusar um valor maior ou igual ao valor χ^2 calculado a partir dos dados da amostra.

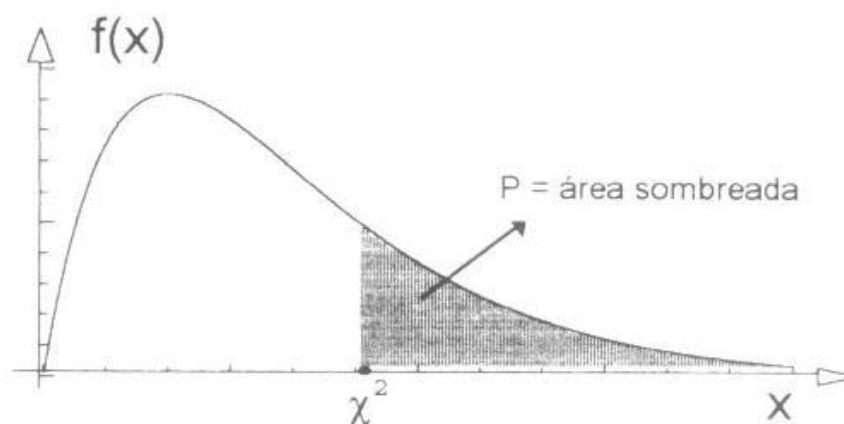


Figura 6.1: probabilidade de significância P

Interpretação:

O aumento nos valores do qui-quadrado causa uma diminuição da área sombreada P ; assim para um χ^2 grande tem-se um valor de P pequeno. Nessa situação, o teste rejeita H_0 em favor de H_1 . Por outro lado, quando os dados observados geram um qui-quadrado pequeno, em consequência, tem-se um valor de P grande – veja Figura 6.1. Nesse caso, não se pode rejeitar H_0 , pois o valor calculado de χ^2 está condizente com a distribuição dos possíveis valores de χ^2 para duas variáveis independentes.

A decisão entre aceitar e rejeitar H_0 pode ser tomada pela comparação do valor de P com o nível de significância α adotado; é usual adotar $\alpha = 5\%$. **Lembrar ainda que o nível de significância representa o risco tolerável de cometer o erro tipo I: rejeitar H_0 , quando é verdadeira.**

Com o auxílio da tabela de distribuição do qui-quadrado, determina-se finalmente a probabilidade de significância P para a tomada de decisão. A

Figura 6.2 ilustra a determinação de P para o caso do exemplo 1, com $gl = 1$, $\chi^2 = 1,74$. Verifica-se que o valor calculado do χ^2 está entre os valores 1,32 (correspondendo a $P = 0,25$) e 2,71 (que corresponde a $P = 0,10$); logo: $0,10 < P < 0,25$. Usando o nível de significância de 5% ($\alpha = 0,05$), o teste aceita H_0 , pois $P > \alpha$. Conclui-se então, que os dados não mostram evidência de associação na população em estudo. *Em outras palavras: a diferença observada na amostra, entre a proporção de homens fumantes e a proporção de mulheres fumantes, pode ser explicada por variações apenas casuais.*

c) Teste qui-quadrado em tabelas de grande dimensão

O procedimento é o mesmo; o que difere é o aumento de cálculos em função do aumento do número de variáveis. De forma sintética, o exemplo 3 trata deste assunto.

Exemplo 3: (Barbetta, 1999, p. 231)

Considere um estudo exploratório em que haja interesse em examinar a recuperação funcional de pacientes, submetidos a um determinado procedimento cirúrgico, em cinco hospitais de uma cidade. Os hospitais A, B, C e D são hospitais comuns, enquanto o hospital E é um hospital de referência, que recebe casos mais graves. A tabela 6.3 mostra os resultados de um levantamento por amostragem, realizado nos cinco hospitais. Realizar o teste qui-quadrado para verificar se realmente existe associação entre *hospital e recuperação funcional do paciente*.

Quadro 6.3: Resultados (frequências e percentagens) da recuperação funcional de pacientes, submetidos a um certo procedimento cirúrgico, em cinco hospitais

Recuperação funcional	Hospital				
	A	B	C	D	E
Nenhuma (%)	13 (27,7)	5 (16,1)	8 (10,1)	21 (16,4)	43 (52,4)
Parcial (%)	18 (38,3)	10 (32,3)	36 (45,6)	56 (43,8)	29 (35,4)
Completa (%)	16 (34,0)	16 (51,6)	35 (44,3)	51 (39,8)	10 (12,2)

O Quadro 6.4 fornece os resultados das frequências esperadas e as parcelas do qui-quadrado.

Quadro 6.4: Resultados do procedimento cirúrgico: frequências observadas (centro), frequências esperadas (canto superior direito) e parcelas do qui-quadrado (canto inferior esquerdo).

Recuperação funcional	Hospital					Total
	A	B	C	D	E	
Nenhuma	11,53 13 0,19	7,60 5 0,89	19,37 8 6,67	31,39 21 3,44	20,11 43 26,05	90

Parcial	19,08 18 0,06	12,59 10 0,53	32,07 36 0,48	51,95 56 0,31	33,39 29 0,55	149
Completa	16,39 16 0,01	10,81 16 2,49	27,55 35 2,02	44,64 51 0,91	28,60 10 12,10	128
Total	47	31	79	128	82	367

A soma dos valores do qui-quadrado resulta: $56,70 \cong 56,7$; o grau de liberdade é igual 8. Na tabela do qui-quadrado, a probabilidade **P** resulta inferior a 0,001; isto mostra haver, para qualquer nível usual de significância (5%, 10%), uma diferença significativa entre os hospitais em estudo, com relação a recuperação funcional de seus pacientes, submetidos à cirurgia em questão. O teste detecta, portanto, uma associação entre recuperação funcional de pacientes e hospital, pois $P < 0$.

O Quadro 6.5 agrega todos os hospitais comuns. A idéia, agora, é confrontar o conjunto (formado pelos hospitais comuns) com o hospital de referência. Os valores das freqüências observadas, na coluna dos hospitais comuns, correspondem à soma das freqüências observadas dos hospitais A, B, C e D do Quadro 6.4. As freqüências esperadas e as parcelas do qui-quadrado foram calculadas novamente.

A soma dos valores do qui-quadrado resulta: $49,84 \cong 49,8$; o grau de liberdade é igual 2. Na tabela do qui-quadrado, a probabilidade **P** resulta inferior a 0,001; isto mostra haver uma diferença significativa entre os hospitais comuns e o hospital de referência.

Quadro 6.5: Comparação do hospital de referência com os demais. Freqüências observadas (centro), freqüências esperadas (canto superior direito) e parcelas do χ^2 (canto inferior esquerdo).

Recuperação funcional	Hospitais Comuns (A+B+C+D)	Hospital Referência (E)	Total
Nenhuma	69,89 47 7,50	20,11 43 26,05	90
Parcial	115,71 120 0,16	33,29 29 0,55	149
Completa	99,40 118 3,48	28,60 10 12,10	128
Total	285	82	367

Finalmente, o Quadro 6.6 analisa os hospitais comuns entre si. As freqüências observadas correspondem às freqüências observadas do Quadro 6.4, eliminando o hospital E.

Quadro 6.6: Comparação entre os hospitais comuns. Freqüências observadas (centro), freqüências esperadas (canto superior direito) e parcelas do qui-quadrado (canto inferior esquerdo).

Recuperação	Hospitais				
Funcional	A	B	C	D	Total
Nenhuma	7,75	5,11	13,03	21,11	

	13 3,55	5 0,00	8 1,94	21 0,00	47
Parcial	19,79 18 0,16	13,05 10 0,71	33,26 36 0,23	53,89 56 0,08	120
Completa	19,46 16 0,61	12,84 16 0,78	32,71 35 0,16	53,00 51 0,18	118
Total	47	31	79	128	285

A soma dos valores qui-quadrados resulta igual a $8,38 \cong 8,4$. O grau de liberdade resulta $gl = 6$. Na tabela do qui-quadrado, a probabilidade **P** resulta:

$0,10 < P < 0,25$. Para $\alpha = 0,05$ ou, até mesmo $\alpha = 0,10$, o teste não detecta associação. Desta forma, pode-se dizer que não há diferença significativa entre os hospitais comuns.

2) Medidas de associação

O objetivo é descobrir um coeficiente aplicado a uma tabela de contingência que possa descrever se os dados se aproximam de uma situação de independência ou de uma situação de associação perfeita; e mais, o quanto se aproximam.

Uma alternativa é utilizar a própria estatística χ^2 ; no entanto, a interpretação da estatística χ^2 como coeficiente de associação não é tão simples, pois o seu valor varia com a dimensão da tabela e com o número de elementos envolvidos.

Um coeficiente amplamente utilizado para medir o grau de associação em uma tabela de contingência é o *coeficiente de contingência*; é definido a partir da estatística χ^2 e do tamanho total da amostra, n :

$$C = \sqrt{\frac{k \cdot \chi^2}{(k-1) \cdot (n + \chi^2)}}$$

Onde, k é o menor valor entre o número de linhas da tabela e o número de colunas da tabela. Por exemplo: numa tabela 3×5 , como a Tabela 6.4, $k = 3$. O valor de C sempre estará entre 0 e 1. Resumindo:

- $C = 1 \Rightarrow$ associação perfeita
- $C = 0 \Rightarrow$ completa independência
- $C \cong 1 \Rightarrow$ associação forte
- $C \cong 0 \Rightarrow$ associação fraca
- $C \cong 0,5 \Rightarrow$ associação moderada

Exemplo:

Medir o grau de associação entre hospital e recuperação funcional de pacientes, descrito pelos dados da Tabela 6.4: $n = 367$ pacientes; tabela de contingência: 3×5 ; $\chi^2 = 56,7$. Então:

$$C = \sqrt{\frac{3.(56,7)}{2.(367+56,7)}} = 0,45;$$
 conclui-se que a amostra total descreve uma associação moderada entre hospital e recuperação funcional de pacientes.

Exemplo de simulação:

Contrapor dois conjuntos de pessoas, classificadas segundo o sexo (homem ou mulher) e tabagismo (fumante ou não fumante). Os dados estão nas Tabelas 6.7 e 6.8 a seguir:

Quadro 6.7: Amostra A

Tabagismo	Sexo	
	Homem	Mulher
Fumante	80 (40%)	40 (40%)
Não fumante	120 (60%)	60 (60%)

Quadro 6.8: Amostra B

Tabagismo	Sexo	
	Homem	Mulher
Fumante	200	0
Não fumante	0	100

Na Tabela 6.7: $n = 300$; $k = 2$; $\chi^2 = 0$. Então: $C = 0 \Rightarrow$ completa independência.
Na Tabela 6.8: $n = 300$; $k = 2$; $\chi^2 = 300$. Então: $C = 1 \Rightarrow$ associação perfeita.

6.2) CORRELAÇÃO

Até aqui usamos o termo associação para medir o grau de relacionamento entre duas variáveis qualitativas. A partir de agora vamos fazer o mesmo, só que, utilizando variáveis quantitativas, isto é, que podem ser medidas. Com isso, o termo associação dá lugar ao termo correlação.

Duas variáveis são correlacionadas quando o comportamento de uma interfere de alguma maneira no comportamento da outra. Diz-se que duas variáveis X e Y estão:

Correlacionadas positivamente	quando	camminham num mesmo sentido
Correlacionadas negativamente	quando	camminham em sentidos opostos

Ou seja:

Valores pequenos de X tendem a estar relacionados com valores pequenos de Y
Valores grandes de X tendem a estar relacionados com valores grandes de Y, e
Valores pequenos de X tendem a estar relacionados com valores grandes de Y
Valores grandes de X tendem a estar relacionados com valores pequenos de Y.

Quadro 6.9: Alguns dados de doze municípios catarinenses

Município	Populaçã o (x1000)	Populaçã o urbana (x1000)	% de populaçã o urbana	Taxa de cresciment o demográfic o	Taxa de mortalidad e infantil	Taxa de alfabetizaçã o
Itajaí	101	94	93	3,19	37	85
Blumenau	193	181	94	4,60	27	90
Rio do Sul	42	39	94	2,78	38	85

Joinville	304	292	96	6,46	25	87
Curitibanos	42	32	76	1,99	67	75
Lages	152	126	83	1,89	63	78
Canoinhas	55	36	66	2,92	41	81
Chapecó	105	77	73	5,32	13	75
Concórdia	68	25	37	2,71	28	84
Florianópolis	219	186	85	3,11	17	87
Criciúma	129	116	90	3,11	32	85
Laguna	42	33	78	1,21	32	77

Fonte: Barbetta, 1998, p. 244.

1) Diagramas de dispersão

São representações sob a forma de pares ordenados (x,y) , onde x é um valor observado de uma variável e y é o valor correspondente da outra variável. São muito úteis, pois são maneiras de visualizar a possível correlação entre as observações de duas variáveis. A Figura 6.2 mostra os casos de correlação entre dados amostrais.

A Figura 6.3 apresenta outros diagramas de dispersão, analisando alguns dados do Quadro 6.9.

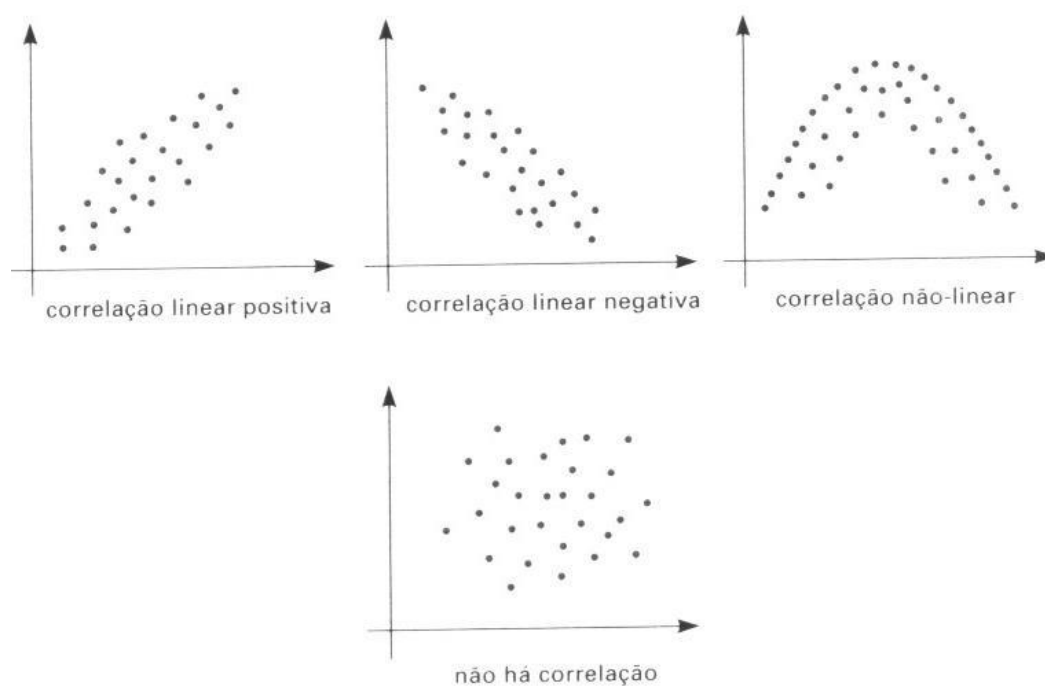


Figura 6.2: Diagramas de dispersão teóricos

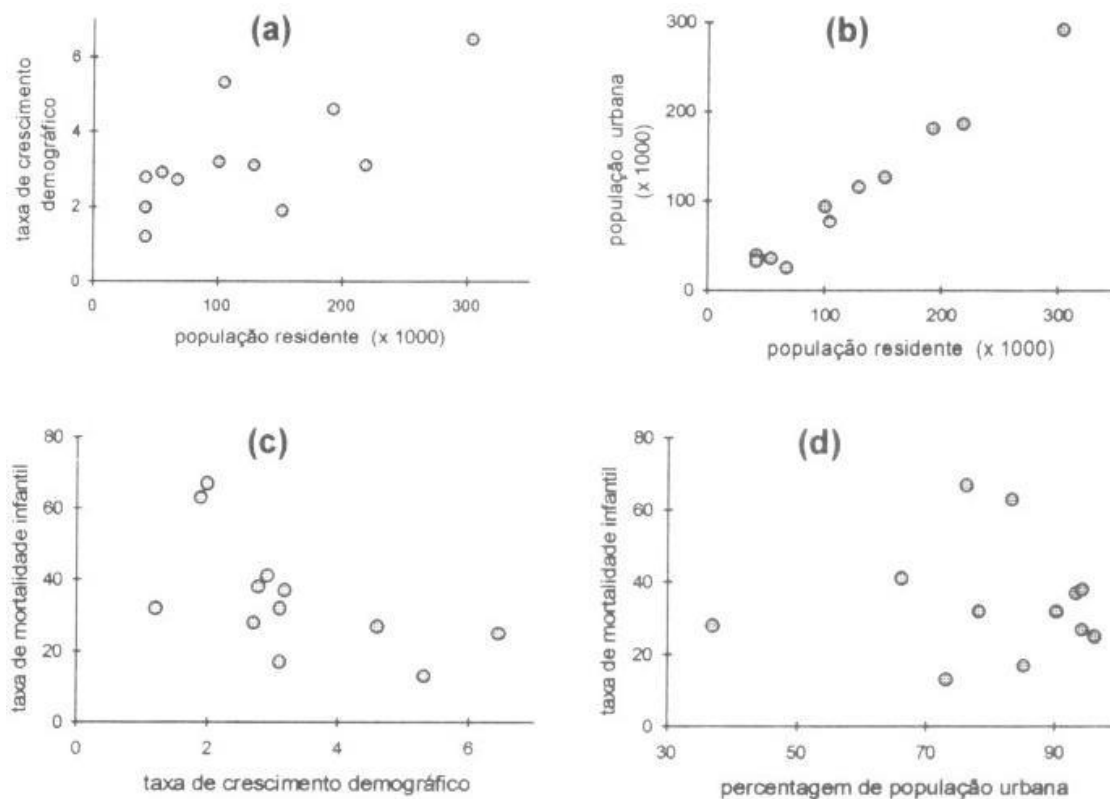


Figura 6.3: Diagramas de dispersão baseados em dados da Tabela 6.9.

Nos casos (a) e (b) da Figura 6.3, há evidência de correlações positivas, pois em ambos os casos, os pontos estão distribuídos em torno de uma linha reta imaginária; nos dois casos, linhas ascendentes!. Em (b) os dados sugerem uma correlação mais forte do que em (a).

Em (c) os dados parecem indicar uma correlação negativa; os pontos estão distribuídos em torno de uma linha imaginária descendente! E, finalmente no caso (d) os dados observados não sugerem um relacionamento entre as duas variáveis em estudo.

Na Figura 6.3 (d) existe um ponto discrepante dos demais; esta é outra vantagem dos diagramas de dispersão: permitir detectar tais situações e analisar separadamente os dados amostrais. No caso, os dados são referentes ao município de Concórdia.

2) Coeficiente de correlação linear

Foi visto anteriormente o coeficiente de contingência, que descreve, através de um número, o grau de associação entre duas variáveis categorizadas. Nesta seção, o interesse está em apresentar um coeficiente apropriado para descrever a correlação linear dos dados de duas variáveis quantitativas. Este coeficiente existe e recebe a denominação de *coeficiente de correlação linear de Pearson - r*.

Uma expressão para o cálculo do coeficiente de correlação de Pearson é apresentada a seguir:

$$r = \frac{\sum (x', y')}{n-1}$$

$$x' = \frac{x - \bar{X}}{S_x}$$

$$y' = \frac{y - \bar{Y}}{S_y}$$

Onde:

n = o tamanho da amostra, isto é, o número de pares (x, y) observados;
 x' e y' são os valores de x e y padronizados, conforme as expressões acima.

Para qualquer conjunto de dados, o valor do coeficiente de correlação de Pearson, r , estará sempre entre -1 e 1. Resumindo:

Será positivo	os dados apresentam correlação linear positiva;
Será negativo	os dados apresentam correlação linear negativa.

$r \Rightarrow$ tão próximo de 1 ou -1 $\Rightarrow$ quanto mais forte a correlação dos dados observados;

$r = +1$ correlação positiva perfeita $\Rightarrow$ pontos estão sobre uma reta ascendente;

$r = -1$ correlação negativa perfeita $\Rightarrow$ pontos sobre uma reta descendente;

$r = 0$ não há correlação nos dados.

Uma outra maneira de calcular o coeficiente de correlação, evita o inconveniente da incorporação de erros de arredondamento no cálculo dos valores padronizados, que podem comprometer o resultado final. A expressão seguinte possibilita o cálculo do coeficiente de correlação, baseada nas observações originais:

$$r = \frac{n \cdot \sum (X \cdot Y) - (\sum X) \cdot (\sum Y)}{\sqrt{n \cdot \sum X^2 - (\sum X)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

onde,

$\sum (X \cdot Y)$	somatório dos produtos $x \cdot y$ para cada par de observações;
$\sum X$	somatório dos valores da variável X ;
$\sum Y$	somatório dos valores da variável Y ;
$\sum X^2$	somatório do quadrado de cada valor de X ;
$\sum Y^2$	somatório do quadrado de cada valor Y .

Exemplo:

Calcular o coeficiente de correlação linear de Pearson, utilizando os dados das variáveis

X = população residente e Y = taxa de crescimento populacional, relativas aos municípios do Quadro 6.9. Os cálculos intermediários estão no Quadro 6.10 (método 1) e Tabela 6.11 (método alternativo), a seguir:

Quadro 6.10: Cálculos para a obtenção dos valores padronizados

Valores originais		Valores padronizados		Produto
x	y	x'	y'	x'.y'
101	3,2	-0,24	-0,05	0,012
193	4,6	0,87	0,88	0,766
42	2,8	-0,95	-0,32	0,304
304	6,5	2,20	2,15	4,730
42	2,0	-0,95	-0,85	0,808
152	1,9	0,37	-0,91	-0,337
55	2,9	-0,79	-0,25	0,198
105	5,3	-0,19	1,35	-0,257
68	2,7	-0,63	-0,38	0,239
219	3,1	1,18	-0,12	-0,142
129	3,1	0,10	-0,12	-0,012
42	1,2	-0,95	-1,38	1,311
$\bar{X} = 121,0$ $S_X = 83,037$	$\bar{Y} = 3,275$ $S_Y = 1,503$			$\Sigma(x'.y') = 7,620$

Calculando, resulta: $r = \frac{\Sigma(x'.y')}{n-1} = \frac{7,620}{11} = 0,69$

Ilustrando o cálculo de r , utilizando a última expressão, a Tabela 6.11 sintetiza alguns cálculos intermediários:

$$r = \frac{n \cdot \Sigma(X.Y) - (\Sigma X) \cdot (\Sigma Y)}{\sqrt{n \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

$$r = \frac{12 \cdot (5.706,2) - 1452 \cdot (39,3)}{\sqrt{12 \cdot (251538) - (1452)^2} \cdot \sqrt{12 \cdot (153,55) - (39,3)^2}} = 0,69$$

Tabela 6.11: Cálculo do coeficiente de correlação de Pearson

Dados		Cálculos intermediários		
X	Y	X ²	Y ²	X.Y
101	3,2	10201	10,24	323,2
193	4,6	37249	21,16	887,8
42	2,8	1764	7,84	117,6
304	6,5	92416	42,25	1976,0
42	2,0	1764	4,00	84,0
152	1,9	23104	3,61	288,8
55	2,9	3025	8,41	159,5
105	5,3	11025	28,09	556,5
68	2,7	4624	7,29	183,6
219	3,1	47961	9,61	678,9
129	3,1	16641	9,61	399,9
42	1,2	1764	1,44	50,4
Soma: 1452	39,3	251538	153,55	5706,2
Notação: ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣY^2	$\Sigma(X.Y)$

3) Teste de significância de r

É realizado quando existe interesse em verificar a existência de correlação entre duas variáveis, X e Y, a partir de uma amostra de observações pareadas. É comum a realização do teste, estabelecendo-se as seguintes hipóteses, relativas à população em estudo:

H₀: as variáveis X e Y *são não correlacionadas*;

H₁: as variáveis X e Y *são correlacionadas*.

A hipótese alternativa poderia, ainda, indicar o sentido da correlação – neste caso o teste seria unilateral; exemplo: X e Y são correlacionadas positivamente; ou outra hipótese, as variáveis X e Y são correlacionadas negativamente. Os testes unilaterais são aplicados nos casos em que já se espera (ou, há indícios) um coeficiente de correlação positivo ou negativo.

Estatística do teste:

Adota-se a seguinte estatística para testar a existência de correlação:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Condições de aplicabilidade do teste:

- a) as variáveis em estudo devem ter distribuição aproximadamente normais – sugere-se a confecção de um diagrama para os dados de cada variável;
- b) neste caso, utilizar a distribuição de *t-Student* como referência;
- c) grau de liberdade $gl = n - 2$;
- d) é apenas aproximado;
- e) finalmente, verificar por meio de um diagrama de dispersão, se os dados não evidenciam um relacionamento não linear, situação esta em que não seria válida a presente análise.

Exemplo:

Calcular o coeficiente de correlação r e testar as hipóteses abaixo; os resultados do teste estão sintetizados na Tabela 6.12.

H₀: os valores dos testes de aptidão em matemática e de aptidão em música *não são correlacionadas*;

H₁: os valores dos testes de aptidão em matemática e de aptidão em música *são correlacionadas*.

Cálculo de r:

$$r = \frac{12 \cdot (56527) - (763) \cdot (885)}{\sqrt{12 \cdot (49985) - (763)^2} \cdot \sqrt{12 \cdot (66823) - (885)^2}} = 0,17$$

Tabela 6.12: Cálculo do coeficiente de correlação de Pearson entre aptidão em Matemática e aptidão em Música.

Dados		Cálculos intermediários		
Matemática	Música	X ²	Y ²	X.Y
X	Y			
60	80	3600	6400	4800
58	62	3364	3844	3596
73	70	5329	4900	5110
51	83	2601	6889	4233
54	62	2916	3844	3348
75	92	5625	8464	6900
48	79	2304	6241	3792
72	88	5184	7744	6336
75	54	5625	2916	4050
83	82	6889	6724	6806
62	64	3844	4096	3968
52	69	2704	4761	3588
Soma: 763	885	49985	66823	56527
Notação: ΣX	ΣY	ΣX^2	ΣY^2	$\Sigma (X.Y)$

O valor de $r = 0,17$ sugere uma correlação positiva fraca; razão pela qual, a hipótese alternativa, ser unilateral.

$$\text{A estatística do teste fornece: } t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,17 \cdot \sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0,17)^2}} = 0,54$$

Como são doze as observações, resulta $gl = 10$; entrando na Tabela de *t-Student*, observa-se que todos os valores de t são superiores ao valor de t calculado, o que leva a uma probabilidade de significância P superior a 0,25.

	Área na cauda superior								
gl	0,25	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,0025	0,0010	0,0005
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,537
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Conclui-se, portanto, que nos níveis de 5%, 10% e mesmo 25%, a hipótese básica ***H₀ não pode ser rejeitada***. Ou seja, a correlação positiva fraca ($r = 0,17$), descrita pelos dados da amostra, não é suficiente para afirmar a existência de correlação positiva entre as duas variáveis em estudo.

6.3) REGRESSÃO LINEAR

O termo regressão surgiu com os trabalhos de Galton. Estes trabalhos procuravam explicar certas características de um indivíduo a partir das características de seus pais. A hipótese de Galton baseava-se, na verdade, numa relação inversa entre as características estudadas, ou seja, *“em média, os filhos de pais altos têm alturas inferiores à altura média de seus pais, enquanto os filhos de pais baixos têm, em média, alturas superiores do que as alturas médias de seus pais”*. A Figura 6.4 ilustra o diagrama de dispersão e os modelos matemáticos que relacionam X e Y .

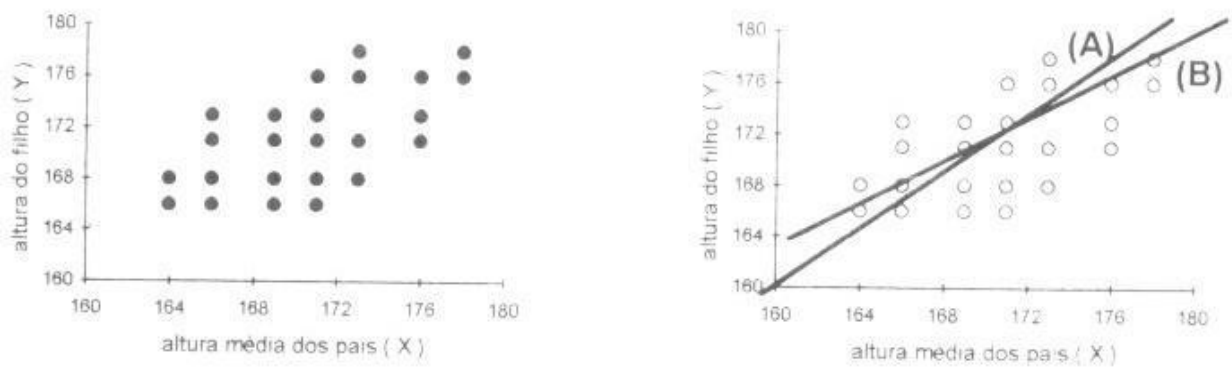


Figura 6.4: Hipótese de Galton (B)

No caso da reta (A) o modelo linear seria $Y = X$, evidenciando que, em média, alturas dos filhos são iguais a altura média dos pais. A equação (B) representa a hipótese de Galton.

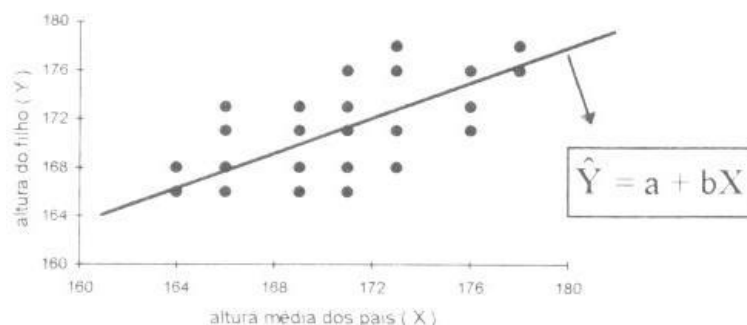
O modelo de regressão:

De forma simplificada, o modelo é expresso por uma relação linear entre as variáveis, tal como: $y = \alpha + \beta x$. Trata-se de uma equação da reta. De modo geral, os dados observados oscilam em torno de uma reta imaginária (ver Figura 6.4). Então, o modelo mais adequado é: $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, onde ε representa o efeito aleatório, isto é, a somatória de fatores que afetam a observação y de forma aleatória.

Cabe então, à análise de regressão produzir uma estimativa para a parte estrutural do modelo ($y = \alpha + \beta x$) a partir de uma amostra de observações (x, y) .

Estimativas dos parâmetros α e β

A idéia é encontrar uma reta que passe “o mais próxima possível” dos pontos observados; é definida por: $\hat{Y} = a + bX$, e denomina-se reta de regressão estimada pelos dados.



O critério dos mínimos quadrados (MMQ) fornece as expressões para a equação de regressão:

$$b = \frac{n \cdot \sum (x \cdot y) - (\sum x) \cdot (\sum y)}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad \text{e} \quad a = \frac{(\sum y) - b \cdot \sum x}{n},$$

onde os elementos envolvidos já são todos conhecidos.

Exemplo:

Em um estudo sobre a influência do fertilizante na safra de trigo, supor que os recursos disponíveis só permitem efetuar sete observações experimentais. O pesquisador fixa, então, sete valores diferentes para X (dosagem de fertilizante), fazendo apenas uma observação Y (sacas/ha) em cada caso, tal como os dados da tabela a seguir. Determine uma reta de regressão aos dados apresentados.

Utilizando os valores dos cálculos intermediários dispostos na tabela e aplicando as expressões, vem:

$$b = \frac{7 \cdot (184500) - (2800) \cdot (420)}{7 \cdot (1400000) - (2800)^2} = 0,059; \quad a = \frac{420 - (0,059) \cdot (2800)}{7} = 36,4$$

X Fertilizante - Kg/ha	Y Safr a – Sacas/ha	X ²	X.Y
100	40	10000	4000
200	50	40000	10000
300	50	90000	15000
400	70	160000	28000
500	65	250000	32500
600	65	360000	39000
700	80	490000	56000
ΣX = 2800	ΣY= 420	ΣX² = 1400000	ΣX.Y = 184500

A reta de regressão estimada é: $\hat{Y} = 36,4 + 0,059.X$.

Pode-se, agora, a partir da equação de regressão estimada, deduzir facilmente uma estimativa de safra para qualquer aplicação de fertilizante. Por exemplo, se for aplicado 350kg de fertilizante, resulta como estimativa da safra, o valor $\hat{Y} = 36,4 + 0,059.(350) = 57$ sacas de trigo/ha.

Variação explicada e não explicada:

Ao ajustar uma equação de regressão aos dados é comum o interesse em verificar o quanto as variações da variável dependente Y, podem ser explicadas (ou justificadas) pelas variações da variável independente X. Esta explicação vem do conhecimento do coeficiente de determinação R^2 mediante o conhecimento dos seguintes desvios:

$$(a) Y - \bar{Y}; \quad (b) \hat{Y} - \bar{Y}; \quad (c) Y - \hat{Y}.$$

A soma dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média $\sum (Y - \bar{Y})^2$, é uma medida da variabilidade total dos dados (lembrar que $\sum (Y - \bar{Y})^2$ é o numerador da fórmula da variância). Analogamente, a soma dos quadrados dos desvios dos valores preditos em relação à média $\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$, é uma medida da parcela da variabilidade explicada pelo modelo de regressão. Finalmente,

$\sum(Y - \hat{Y})^2$ pode ser interpretada como uma medida da variabilidade não explicada ou residual.

Denomina-se coeficiente de determinação à seguinte relação:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}.$$

Exemplo:

Calcular o coeficiente de determinação para os dados a seguir:

X	Y	Regressão	$(Y - \bar{Y})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \hat{Y})^2$
164	166	165,01	26,11	37,11	0,98
166	166	166,75	26,11	19,01	0,56
169	171	169,37	0,01	3,03	2,66
169	166	169,37	26,11	3,03	11,36
171	171	171,11	0,01	0,00	0,01
173	171	172,86	0,01	3,06	3,46
173	178	172,86	47,47	3,06	26,42
176	173	175,47	3,57	19,01	6,10
178	178	177,22	47,47	37,33	0,61
$\bar{Y} = 171,11$		Soma:	177	125	52
		Notação:	$\sum(Y - \bar{Y})^2$	$\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$\sum(Y - \hat{Y})^2$

A equação de regressão, já determinada é: $\hat{Y} = 22 + (0,872).X$

Fontes de variação:

Devido a X, segundo o modelo – variação explicada: $\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 125$;

Variação residual ou não explicada: $\sum(Y - \hat{Y})^2 = 52$;

Variação total: $\sum(Y - \bar{Y})^2 = 177$.

O coeficiente de determinação R^2 é: $R^2 = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} = \frac{125}{177} \cong 0,70$, ou $R^2 = 70\%$.

O resultado é assim interpretado: dentre os nove indivíduos estudados (x,y), as variações de suas alturas são explicadas, em parte, pela variação das alturas de seus pais (70% de explicação); outra parte, (30% de explicação) é devida a outros fatores.

Aplicação final:

Nos últimos anos, em várias regiões, houve um movimento migratório que fez crescer bastante a população urbana nos municípios médios e grandes. Neste contexto, objetiva-se explicar o crescimento demográfico de um município em função de sua população urbana, para os municípios da Tabela 6.9.

Quesitos:

a) qual deve ser a variável dependente e a independente?

- b) calcule o coeficiente de correlação de Pearson;
 c) estime a equação de regressão;
 d) desenhe um gráfico com os pontos observados e a reta de regressão estimada;
 e) qual a taxa de crescimento demográfico, predita pela equação de regressão, para um município de 300 mil habitantes?
 f) Calcule o coeficiente de determinação;

Solução:

a) A variável dependente Y será a *taxa de crescimento demográfico* do município; a variável independente X será a *população urbana*.

Elaboração de quadro com dados e cálculos intermediários:

X	Y	X ²	Y ²	X.Y	(Y - $\bar{Y}$) ²	($\hat{Y}$ - $\bar{Y}$) ²	(Y - $\hat{Y}$) ²
94	3,19	8836	10,1761	299,86	0,007084	0,013059	0,000907
181	4,60	32761	21,16	832,6	1,757833	0,960916	0,119419
39	2,78	1521	7,7284	108,42	0,244201	0,650003	0,097382
292	6,46	85264	41,7316	1886,32	10,14953	5,648918	0,654623
32	1,99	1024	3,9601	63,68	1,649085	0,799762	0,152001
126	1,89	15876	3,5721	238,14	1,915918	0,083124	2,797188
36	2,92	1296	8,5264	105,12	0,125434	0,712286	0,239907
77	5,32	5929	28,3024	409,64	4,185433	0,107684	5,635807
25	2,71	625	7,3441	67,75	0,318284	0,965032	0,174886
186	3,11	34596	9,6721	578,46	0,026951	1,088199	1,457657
116	3,11	13456	9,6721	360,76	0,026951	0,026407	0,106714
33	1,21	1089	1,4641	39,93	4,260785	0,777418	1,398198
$\Sigma X =$ 1237	$\Sigma Y =$ 39,29	$\Sigma X^2 =$ 202273	$\Sigma Y^2 =$ 153,3095	$\Sigma X.Y =$ 4990,68	$\Sigma (Y - \bar{Y})^2$ 24,66749	$\Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2$ 11,83281	$\Sigma (Y - \hat{Y})^2$ 12,83469

$$\bar{Y} = 3,27$$

b) Coeficiente de correlação de Pearson r:

$$r = \frac{n \cdot \sum (X.Y) - (\sum X) \cdot (\sum Y)}{\sqrt{n \cdot \sum X^2 - (\sum X)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum Y^2 - (\sum Y)^2}};$$

$$r = \frac{12 \cdot (4990,68) - (1237 \cdot 39,29)}{\sqrt{12 \cdot (202273) - (1237)^2} \cdot \sqrt{12 \cdot (153,3095) - (39,29)^2}} = 0,69$$

c) estimativa da equação de regressão: $\hat{Y} = a + bX$, com:

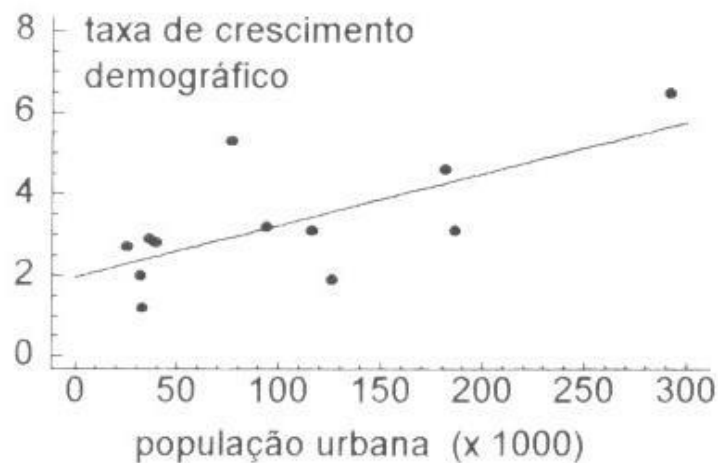
$$b = \frac{n \cdot \sum (x.y) - (\sum x) \cdot (\sum y)}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad \text{e} \quad a = \frac{(\sum y) - b \cdot \sum x}{n}$$

Resulta: b = 0,01258092

a = 1,9772836

A equação de regressão estimada é: $\hat{Y} = 1,9772836 + 0,0125809.X$

d) Gráfico dos pontos observados e reta de regressão:



e) Para um município de 300 mil habitantes, a taxa de crescimento demográfico estimado é de: $\hat{Y} = 1,9772836 + 0,0125809 \cdot (300) = 5,8\%$

f) Coeficiente de determinação R^2 :

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} \quad R^2 = \frac{11,83280754}{24,66749167} = 0,48$$

Verificação:

1) o quadrado do coeficiente de correlação (r^2) é igual ao coeficiente de determinação (R^2), ou seja: $R^2 = (0,69)^2 = 0,48$.

2) A variabilidade dos dados pode ser decomposta em termos do modelo de regressão: a parte explicada (11,83281) e a não explicada (12,83469). As duas parcelas juntas são responsáveis pela variabilidade total (24,66749).

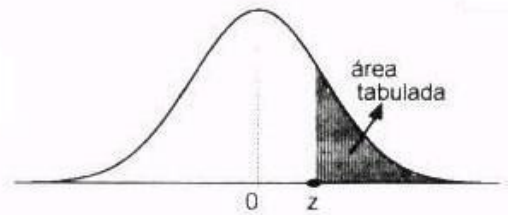
Dezembro/2007.

APÊNDICE 1
Tabela de números aleatórios

98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07	35 44 13 18 80
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94	37 54 87 30 43
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98	94 62 46 11 71
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39	00 38 75 95 79
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27	77 93 89 19 36
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21	80 81 45 17 48
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55	36 04 09 03 24
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40	88 46 12 33 56
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46	15 02 00 99 94
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15	01 84 87 69 38
09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74	64 27 85 80 44
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	98 93 88 19 97	91 87 07 61 50	68 47 66 46 59
73 18 95 02 07	47 67 72 52 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18	41 36 18 27 60
75 76 89 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71	93 82 34 31 78
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95	07 70 61 78 13
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53	21 22 30 84 20
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75	94 11 90 18 40
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95	77 76 22 07 91
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14	83 48 34 70 55
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06	94 54 13 74 08
77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80	72 89 35 55 07
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51	65 34 46 74 15
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46	31 85 33 84 52
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91	08 00 74 54 49
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42	43 86 07 28 34
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22	93 17 49 39 72
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00	71 14 84 36 43
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61	62 32 71 84 23
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60	81 60 41 88 80
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69	85 64 44 72 77
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49	65 58 44 96 98
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05	40 03 03 74 38
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47	15 50 12 95 78
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41	03 85 65 45 52
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56	64 69 11 92 02
07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38	04 71 36 69 94
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39	61 21 20 64 55
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83	92 30 15 04 98
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39	06 41 01 93 62
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51	31 02 47 31 67

Fonte. BLALOCK, H. M. (1960).

Distribuição normal padrão



	segunda decimal de z									
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2842	0,2843	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,00135									
3,5	0,000 233									
4,0	0,000 031 7									
4,5	0,000 003 40									
5,0	0,000 000 287									

APÊNDICE 3
Tabela de distribuição Binomial (1)

Distribuição Binomial											
n	x	p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0283	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1381	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0937
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

APÊNDICE 3
Tabela de distribuição Binomial (2)

Continuação

n	x	π								
		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
1	0	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500
	1	0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500
2	0	0,2025	0,1600	0,1225	0,0900	0,0625	0,0400	0,0225	0,0100	0,0025
	1	0,4950	0,4800	0,4550	0,4200	0,3750	0,3200	0,2550	0,1800	0,0950
	2	0,3025	0,3600	0,4225	0,4900	0,5625	0,6400	0,7225	0,8100	0,9025
3	0	0,0911	0,0640	0,0429	0,0270	0,0156	0,0900	0,0034	0,0010	0,0001
	1	0,3341	0,2880	0,2389	0,1890	0,1406	0,0960	0,0574	0,0270	0,0071
	2	0,4084	0,4320	0,4436	0,4410	0,4219	0,3840	0,3251	0,2430	0,1354
	3	0,1664	0,2160	0,2746	0,3430	0,4219	0,5120	0,6141	0,7290	0,8574
4	0	0,0410	0,0256	0,0150	0,0081	0,0039	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,2005	0,1536	0,1115	0,0756	0,0469	0,0256	0,0115	0,0036	0,0005
	2	0,3675	0,3456	0,3105	0,2646	0,2109	0,1536	0,0975	0,0486	0,0135
	3	0,2995	0,3456	0,3845	0,4116	0,4219	0,4096	0,3685	0,2916	0,1715
	4	0,0915	0,1296	0,1785	0,2401	0,3164	0,4096	0,5220	0,6561	0,8145
5	0	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,1128	0,0768	0,0488	0,0284	0,0146	0,0064	0,0022	0,0004	0,0000
	2	0,2757	0,2304	0,1811	0,1323	0,0879	0,0512	0,0244	0,0081	0,0011
	3	0,3369	0,3456	0,3364	0,3087	0,2637	0,2048	0,1382	0,0729	0,0214
	4	0,2059	0,2592	0,3124	0,3601	0,3955	0,4096	0,3915	0,3281	0,2036
	5	0,0503	0,0778	0,1160	0,1681	0,2373	0,3277	0,4437	0,5905	0,7738
6	0	0,0083	0,0041	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0609	0,0369	0,0205	0,0102	0,0044	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000
	2	0,1861	0,1382	0,0951	0,0595	0,0330	0,0154	0,0055	0,0012	0,0001
	3	0,3032	0,2765	0,2355	0,1852	0,1318	0,0819	0,0415	0,0146	0,0021
	4	0,2780	0,3110	0,3280	0,3241	0,2966	0,2458	0,1762	0,0984	0,0305
	5	0,1359	0,1866	0,2437	0,3025	0,3560	0,3932	0,3993	0,3543	0,2321
	6	0,0277	0,0467	0,0754	0,1176	0,1780	0,2621	0,3771	0,5314	0,7351
7	0	0,0037	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0320	0,0172	0,0084	0,0036	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,1172	0,0774	0,0466	0,0250	0,0115	0,0043	0,0012	0,0002	0,0000
	3	0,2388	0,1935	0,1442	0,0972	0,0577	0,0287	0,0109	0,0026	0,0002
	4	0,2918	0,2903	0,2679	0,2269	0,1730	0,1147	0,0617	0,0230	0,0036
	5	0,2140	0,2613	0,2985	0,3177	0,3115	0,2753	0,2097	0,1240	0,0406
	6	0,0872	0,1306	0,1848	0,2471	0,3115	0,3670	0,3960	0,3720	0,2573
	7	0,0152	0,0280	0,0490	0,0824	0,1335	0,2097	0,3206	0,4783	0,6983
8	0	0,0017	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0164	0,0079	0,0033	0,0012	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0703	0,0413	0,0217	0,0100	0,0038	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,1719	0,1239	0,0808	0,0467	0,0231	0,0092	0,0026	0,0004	0,0000
	4	0,2627	0,2322	0,1875	0,1361	0,0865	0,0459	0,0185	0,0046	0,0004
	5	0,2568	0,2787	0,2786	0,2541	0,2076	0,1468	0,0839	0,0331	0,0054
	6	0,1569	0,2090	0,2587	0,2965	0,3115	0,2936	0,2376	0,1488	0,0515
	7	0,0548	0,0896	0,1373	0,1977	0,2670	0,3355	0,3847	0,3826	0,2793
	8	0,0084	0,0168	0,0319	0,0576	0,1001	0,1678	0,2725	0,4305	0,6634

Tabela de distribuição Binomial (3)

continuação											
n	x	π									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2986	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002

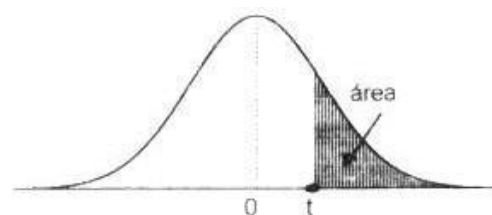
APÊNDICE 3
Tabela de distribuição Binomial (4)

continuação

n	x	α								
		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
9	0	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0083	0,0035	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0407	0,0212	0,0098	0,0039	0,0012	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,1160	0,0743	0,0424	0,0210	0,0087	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000
	4	0,2128	0,1672	0,1181	0,0735	0,0389	0,0165	0,0050	0,0008	0,0000
	5	0,2600	0,2508	0,2194	0,1715	0,1168	0,0661	0,0283	0,0074	0,0006
	6	0,2119	0,2508	0,2716	0,2668	0,2336	0,1762	0,1069	0,0446	0,0077
	7	0,1110	0,1612	0,2162	0,2668	0,3003	0,3020	0,2597	0,1722	0,0629
	8	0,0339	0,0605	0,1004	0,1556	0,2253	0,3020	0,3679	0,3874	0,2986
	9	0,0046	0,0101	0,0207	0,0404	0,0751	0,1342	0,2316	0,3874	0,6302
10	0	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0042	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0229	0,0106	0,0043	0,0014	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0746	0,0425	0,0212	0,0090	0,0031	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,1596	0,1115	0,0689	0,0368	0,0162	0,0055	0,0012	0,0001	0,0000
	5	0,2340	0,2007	0,1536	0,1029	0,0584	0,0264	0,0085	0,0015	0,0001
	6	0,2384	0,2508	0,2377	0,2001	0,1460	0,0881	0,0401	0,0112	0,0010
	7	0,1665	0,2150	0,2522	0,2668	0,2503	0,2013	0,1298	0,0574	0,0105
	8	0,0763	0,1209	0,1757	0,2335	0,2816	0,3020	0,2759	0,1937	0,0746
	9	0,0207	0,0403	0,0725	0,1211	0,1877	0,2684	0,3474	0,3874	0,3151
	10	0,0025	0,0060	0,0135	0,0282	0,0563	0,1074	0,1969	0,3487	0,5987
11	0	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0021	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0126	0,0052	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0462	0,0234	0,0102	0,0037	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,1128	0,0701	0,0379	0,0173	0,0064	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000
	5	0,1931	0,1471	0,0985	0,0566	0,0268	0,0097	0,0023	0,0003	0,0000
	6	0,2360	0,2207	0,1830	0,1321	0,0803	0,0388	0,0132	0,0025	0,0001
	7	0,2060	0,2365	0,2428	0,2201	0,1721	0,1107	0,0536	0,0158	0,0014
	8	0,1259	0,1774	0,2254	0,2568	0,2581	0,2215	0,1517	0,0710	0,0137
	9	0,0513	0,0887	0,1395	0,1998	0,2581	0,2953	0,2866	0,2131	0,0867
	10	0,0125	0,0266	0,0518	0,0932	0,1549	0,2362	0,3248	0,3835	0,3293
	11	0,0014	0,0036	0,0088	0,0198	0,0422	0,0859	0,1673	0,3138	0,5688
12	0	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0068	0,0025	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0277	0,0125	0,0048	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0762	0,0420	0,0199	0,0078	0,0024	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
	5	0,1489	0,1009	0,0591	0,0291	0,0115	0,0033	0,0006	0,0000	0,0000
	6	0,2124	0,1766	0,1281	0,0792	0,0401	0,0155	0,0040	0,0005	0,0000
	7	0,2225	0,2270	0,2039	0,1585	0,1032	0,0532	0,0193	0,0038	0,0002
	8	0,1700	0,2128	0,2367	0,2311	0,1936	0,1329	0,0683	0,0213	0,0021
	9	0,0923	0,1419	0,1954	0,2397	0,2581	0,2362	0,1720	0,0852	0,0173
	10	0,0339	0,0639	0,1088	0,1678	0,2323	0,2835	0,2924	0,2301	0,0988
	11	0,0075	0,0174	0,0368	0,0712	0,1267	0,2062	0,3012	0,3766	0,3413
	12	0,0008	0,0022	0,0057	0,0138	0,0317	0,0687	0,1422	0,2824	0,5404

APÊNDICE 4
Tabela de distribuição t de Student

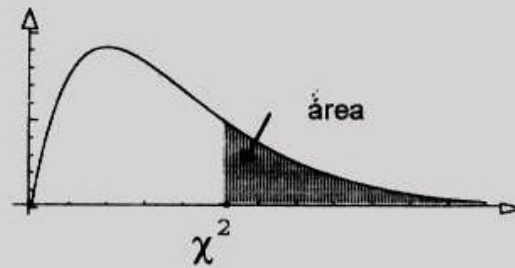
Distribuição t de Student



gl	área na cauda superior								
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,0025	0,0010	0,0005
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,637	127,32	318,31	636,62
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,326	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,213	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,020	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,537
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,567	2,673	3,047	3,408	3,647
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

APÊNDICE 5
Tabela de distribuição χ^2

Distribuição qui-quadrado



gl	área na cauda superior						
	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
1	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	28,2	33,2	36,4	39,4	42,8	45,6	51,2
25	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
40	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
50	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
60	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0	99,6
70	77,6	85,5	90,5	95,0	100	104	112
80	88,1	96,6	102	107	112	116	125
90	98,6	108	113	118	124	128	137
100	109	118	124	130	136	140	149